

Soluzione della curva di luce di MS Cep mediante
tecniche IMT (Interactive Minimization Techniques).

1) Introduzione

Negli ultimi anni l'abbondare della scoperta di nuove tecniche di ottimizzazione la loro applicazione ai piu' svariati campi di ricerca ha portato alla messa a punto e alla applicazione delle cosiddette Tecniche di Ottimizzazione Interattiva le quali si differenziano da quelle tradizionali non nella sostanza, ma nel modo in cui esse vengono applicate.

Infatti usando le tecniche di ottimizzazione tradizionali, dopo che il punto di partenza (vettore iniziale dei parametri liberi) e' stato dato il programma lavora in maniera autonoma muovendosi convenientemente nello spazio dei parametri fino a determinare una valutazione, ritenuta ottimale secondo taluni criteri codificati nel programma stesso, degli elementi del vettore dei parametri liberi in maniera completamente autonoma.

Nel caso di un algoritmo di ottimizzazione interattiva invece e' l'utente che guida, dialogando con la macchina, la ricerca dell'ottimo valutando le informazioni che il computer fornisce step by step durante l'esecuzione del processo di ricerca.

Tali tecniche presentano pregi e difetti e le opinioni sul loro uso sono discordi, in questo lavoro verra' applicato un algoritmo di questo genere al problema di risolvere la curva di luce di una variabile ad eclisse e verranno descritti i risultati ottenuti e discusse le caratteristiche dell'algoritmo usato.

Va tenuto presente che come utile termine di confronto e' stato usato l'output fornito dal programma E.V.L.C.S. il quale e' di sicura affidabilita'.

2) La stella in esame: MS CEP

MS Cep (VV450) e' una variabile ad eclisse scoperta da W.J. Miller durante il suo ormai noto survey fotografico nelle costellazioni di Cepheus e Lacerta (Miller, 1973).

Le sue coordinate riferite al 1900.0 sono le seguenti:

$$AR(1900) = 22h 07m 50s$$

$$DB(1900) = +53^{\circ} 44' 44''$$

Le sue caratteristiche sono:

$$Max. = 14.66 \text{ pg}$$

$$Min.1 = 16.73 \text{ pg}$$

L'effemeride relativa al minimo primario e' la seguente:

$$Min.1 = JDo 243595.404 + 3 \frac{d}{.36095} * E$$

±5
±2

ricalcolata da Gaspani sulla base dei 4 minimi primari riportati da Miller

e Wachmann.

In piu' si hanno i seguenti dati supplementari:

$$D = .16 * P$$

Il tipo spettrale di MS Cep non e' noto nemmeno approssimativamente. Nessuna soluzione orbitale, nemmeno preliminare, risulta attualmente nota per questa stella.

3) Osservazioni

Le osservazioni ottenute da W.J. Miller per la stella in esame sono totalmente 377 le quali coprono un periodo osservativo di 2568 giorni pari a 764 cicli approssimativamente. La lunghezza d'onda equivalente a cui le osservazioni sono state ottenute e', dipendentemente dal materiale fotografico impiegato e dalle tecniche adottate per il suo trattamento, intorno ai 4250 Å, almeno secondo le indicazioni fornite da W.J. Miller e A.A. Wachmann. Dalle 764 lastre nel blu sono stati ottenuti i 24 punti normali che compongono la curva di luce mostrata nelle figura 1.

3) Soluzione della curva di luce

La soluzione della curva di luce di MS Cep si e' rivelata molto interessante in quanto ha permesso di eseguire degli utili confronti di tecniche di ottimizzazione da impiegare nella determinazione dei parametri del sistema. Va ricordato che la geometria del sistema binario risulta (nel modello sfera-sfera) univocamente determinata qualora si conoscano tre parametri e cioè k, G1, G2 il cui significato e', come di consueto:

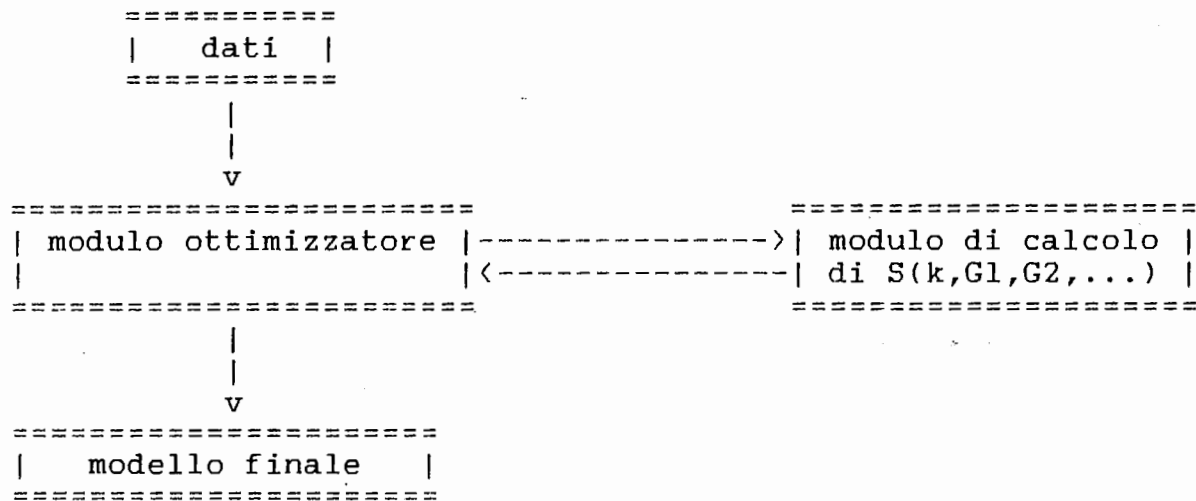
$$k = f(u_l) * r_s / r_g \quad G1 = g(u_l) * r_g^2 * \text{cosec}^2(i) \quad G2 = h(u_l) * c_t g^2(i)$$

dove rg: raggio frazionario della stella piu' grande
rs: raggio frazionario della stella piu' piccola
|i|: inclinazione orbitale
f,g,h: funzioni del limb darkening ul della stella eclissata

L'applicazione, del programma E.V.L.C.S. permette una consistente ed affidabile soluzione della curva di luce fornendo in output un modello abbastanza completo dl sistama binario analizzato. Questo modello oltre ad essere interessante ai fini puramente conoscitivi della variabile ad eclisse sotto analisi puo' costituire un utile termine di paragone per confrontare vari ottimizzatori della funzione obbiettivo S(k,G1,G2,...) che e' necessasrio minimizzare al fine di risolvere il problema. Come e' noto la funzione obbiettivo trattata in questi casi ha la seguente definizione:

$$S(k,G1,G2,...) = || d ||^2$$

dove d e' il vettore dei residui e $||\sim||$ e' l'operatore "norma euclidea".
 La struttura dell' EVLCS e' di tipo modulare e puo' essere brevemente descritta
 in questo modo:



Di fatto si osserva una grande flessibilita' e possibilita' di rendere intercambiabile il modulo ottimizzatore in modo da testare le performances di varie tecniche di minimizzazione siano esse di natura deterministica che stocastica.

La soluzione ottenuta con l'EVLCS non ha presentato alcun problema ed e' riportata nella tabella I, mentre la figura 2 riporta la curva di luce teorica plottata tra i dati sperimentali relativi al minimo primario unitamente alla tabella dei residui.

Ora va ricordato che i valori ottimali, nel senso EVLCS, per i parametri geometrici $k, G1, G2$ sono i seguenti unitamente al valore minimale della funzione obbiettivo $S(k, G1, G2, \dots)$:

$$k = .824 \pm .049 \qquad G1 = .0744 \pm .0029 \qquad G2 = .0000 \pm .0049$$

$$S(k, G1, G2, \dots) = .0229465129$$

Osservando quanto ottenuto in output dall' E.V.L.C.S. e riportato estensivamente nella tabella I si nota che il valore nullo ottenuto per il parametro $G2$ implica una inclinazione orbitale di 90 gradi, almeno entro la barra d'errore implicata dalla incertezza delle osservazioni. Tale fatto risulta molto favorevole nel caso presente in quanto cio' rende possibile studiare le performances degli algoritmi IMT eseguendo una semplice applicazione alla ottimizzazione interattiva di una funzione obbiettivo bidimensionale rendendo piu' snello, comprensibile ed intuitivo il modo di procedere.

Infatti la bidimensionalita' della funzione obbiettivo $S(k, G1, G2, \dots)$ semplifica il calcolo rendendo, tra l'altro, direttamente mappabile la funzione obbiettivo utilizzando una sola mappa.

Nel caso che anche $G2$ fosse stato necessariamente da ottimizzare sarebbe stato necessario lavorare simultaneamente su tre mappe della $S(\dots)$ con piu' difficolta' da parte dell' operatore (umano...).

Il termine "mappa" viene usato in questa sede per definire un diagramma XY in cui sono plottate le curve di livello della funzione $F(X, Y)$ sotto studio (va ricordato che altre tecniche di mappatura sono pero' possibili...). Nel caso di una funzione $F(X, Y, Z)$ appare chiaro che le sezioni da studiare sono 3 e cioe' XY, XZ e YX ovviamente...

4) Data Processing

o) La Funzione Obbiettivo

La funzione obbiettivo, oramai in forma bidimensionale, e' generabile mediante una apposita routine scritta in 3 versioni, una in FORTRAN IV (DEC VMS FORTRAN per VAX e mVax) una in GWBASIC 3.20 (in ambiente MSDOS su IBM PC e compatibili) ed una in BASIC 7.0 adatto a un COMMODORE C128.

(Va ricordato che la versione dell'E.V.L.C.S. usata in questo caso e' in GWBASIC, sotto MSDOS, e la routine corrispondente e' stata estratta da essa ed interfacciata con l'ottimizzatore interattivo IOA.PAS anch'esso scritto in GWBASIC).

Al fine di avere inizialmente una idea dell'andamento della funzione obbiettivo e' stata eseguita una mappatura preliminare, superflua nel caso della ottimizzazione, ma molto utile dal punto di vista didattico in quanto permette di farsi una idea della sua complicazione.

La figura 3 riporta il diagramma 2D della $S(k, G1, G2...)$ ottenuta usando la routine FORTRAN che eseguita su un VAX 11/750 risulta piu' veloce. Osservando tale figura si nota che le curve di livello della funzione obbiettivo assomigliano localmente a quelle tipiche di funzioni quali la Funzione di Rosenbrock o la Shallow-Function le quali sono notoriamente usate come banco di prova per il collaudo delle performances degli algoritmi di ottimizzazione.

Tale andamento spiega la difficolta' generalmente incontrata da parte dei metodi generalmente in uso a trovare rapidamente buone soluzioni per le curve di luce delle variabili ad eclisse.

o) Il programma IOA.BAS

Il programma IOA.BAS rappresenta in questo caso l'ottimizzatore interattivo impiegato per risolvere la curva di luce di MS CEP.

La sua struttura e suo funzionamento sono facilmente descrivibili essendo entrambi di una abissale semplicita'.

La tecnica di ottimizzazione adottata e' la piu semplice che esiste e cioe' una "grid search".

In parole povere avviene che dato un intervallo in X e Y (nel caso presente k e G1) il programma calcola una griglia di 20x20 nodi in cui viene valutata la funzione obbiettivo.

Successivamente vengono selezionati il valore massimo e il valore minimo di $S(...)$ tra i 400 calcolati, indi assegnato un livello pari a 0 al $\inf(S)$ e un livello pari a 9 al $\sup(S)$.

Il passo successivo e' di assegnare i livelli 1-8 ai rimanenti corrispondenti 398 valori calcolati della funzione obbiettivo indi eseguire una mappa ASCII dei 400 nodi con il rispettivo codice di livello.

Tale procedura permette di visualizzare approssimativamente l'andamento della funzione obbiettivo e parallelamente il programma calcola le coordinate de nodo tale che $S_0 = \inf(S)$ cioe' quello identificato dal livello 0 unitamente alla incertezza che sussiste su tale determinazione.

Tali incertezze, in X e in Y sono definite come l'ampiezza dello step di griglia nelle due direzioni.

L'utente inizia ad ottimizzare adottando un intervallo nelle due direzioni ragionevolmente largo.

Dopo che il RUN e' stato eseguito l'utente avra' a disposizione sul monitor la mappa alfanumerica della funzione obbiettivo da minimizzare unitamente ai valori dei parametri liberi corrispondenti alle coordinate del nodo marcato con "0" sulla mappa e alle loro incertezze.

A questo punto sara' possibile restringere l'intervallo di ricerca nelle due direzioni ed eseguire un altro RUN ottenendo una nuova mappa ed una nuova stima del vettore ottimale.

Praticamente il processo corrisponde a uno zoom sulla zona della funzione obbiettivo dove l'ottimo sembra ubicato.

Ripetendo il processo descritto piu' volte e' possibile arrivare ad una accuratezza sui parametri ottimali limitata solamente dalla precisione di calcolo della macchina usata.

Ovviamente l'abilita' e l'esperienza dell'operatore risultano di fondamentale importanza nel giungere alla soluzione nella maniera piu' rapida possibile. Va ricordato anche il fatto che se la funzione obbiettivo e' dotata di piu' minimi essi appariranno tutti evidenti sulla mappa alfanumerica per cui l'algoritmo descritto presentemente possiede ottime proprieta' di globalita' nella minimizzazione.

o) Applicazione a MS Cep

L'applicazione dell'algoritmo descritto alla soluzione della curva di luce della stella in esame ha fornito dei risultati ottimi.

In questo caso si ha la seguente equivalenza di notazione:

E.V.L.C.S.	IOA.BAS
k	Y
G1	X
S(k,G1)	F(Y,X)

L'intervallo di partenza e' stato scelto facendo finta di non avere alcuna informazione intorno ai risultati in modo da conservare la massima generalita' di procedimento per cui l'intervallo iniziale scelto e' stato [0,1] per ciascun parametro libero.

Tale fatto e' eccessivo in pratica in quanto dalla curva di luce e' facile avere una stima grossolana dei valori di k e G1 eseguendo solo qualche semplice calcolo sulla durata e sulla profondita' dell'eclisse.

Complessivamente sono stati eseguiti 6 RUNs per giungere alla soluzione della curva di luce con un alto grado di precisione.

La tabella II raccoglie e mette in evidenza i risultati dei vari RUNs eseguiti, mentre le figure 4 a 9 mostrano le mappe ottenute direttamente in output dal programma IOA.BAS.

Osservando i valori ottimali ottenuti con il processo IMT e confrontandoli con quelli ottenuti con l'E.V.L.C.S. si nota chiaramente che gia' al sesto RUN era stata raggiunta la precisione permessa dalle osservazioni disponibili. Infatti osservando la mappa corrispondente al RUN 6 si nota che comincia ad apparire un altro nodo marcato "0" vicino al nodo corrispondente al valore ottimale dei parametri liberi.

Cio' e' dovuto al fatto che la precisione della funzione obbiettivo comincia a non consentire una risoluzione piu' spinta sulla mappa alfanumerica.

Infatti si nota che il grid step e' ormai di un ordine di grandezza al di sotto dei valori delle barre d'errore che l'E.V.L.C.S. prevede.

Questo evidente accordo tra i risultati dei due metodi gioca il ruolo di una ulteriore conferma che le barre d'errore prodotte in output dallo

E.V.L.C.S. sono correttamente calcolate e rispecchiano in pieno la incertezza

prodotta sulla curva di luce della stella studiata dal noise osservativo.

o) Complessita', Efficienza e Costo di Esecuzione

Un altro aspetto fondamentale che non va trascurato testando le performances di un algoritmo sono le sue caratteristiche di complessita' computazionale, efficienza nella ricerca e le risorse richieste per risolvere il problema proposto.

Nel caso del problema in esame e' interessante considerare quante volte viene valutata la funzione obbiettivo prima di giungere alla soluzione. Va anche notato che nel caso presente il "costo di valutazione" cioe' le risorse impiegate nel calcolo di un singolo valore di $S(\dots)$ sono molto poco dipendenti dal numero dei parametri liberi N_p .

Ora essendo l'algoritmo codificato nel programma IOA.BAS un grid search appare evidente che con le caratteristiche descritte precedentemente si ha che il numero di valutazioni della funzione obbiettivo necessarie sara' pesantemente dipendente dal numero dei parametri liberi tanto che la complessita' computazionale dell'algoritmo considerato sara' $O(20 * N_p)$, va da se che tale algoritmo sara' in tempo esponenziale di conseguenza la sua complessita' risulta pesante.

Il costo di esecuzione $C(a,S)$ relativo all'esecuzione di un singolo RUN dell'algoritmo a (nel caso presente quello codificato nel programm IOA.BAS) per ottimizzare S puo essere espresso nel modo seguente:

$$C(a,S) = v(a,S) + b(a)$$

dove $v(a,S)$ e' il "costo di valutazione" che puo' essere inteso come il numero di operazioni aritmetiche necessarie per calcolare un singolo valore della $S(\dots)$, mentre $b(a)$ rappresenta il "costo di combinazione" cioe' nel caso presente il numero di operazioni aritmetiche necessarie per la mappatura e per la selezione del nodo dotato di funzione obbiettivo pari a $\inf(S)$.

Ora appare chiaro che $v(a,S)$ dipende dal numero di punti che compongono la curva di luce, mentre $b(a)$ dipende dal numero dei parametri liberi da ottimizzare.

Di fatto appare evidente analizzando la routine di valutazione di $S(\dots)$ che il costo di valutazione diviene ben presto piuttosto elevato soprattutto se si ha a che fare con curve di luce ben coperte, d'altro canto anche il costo di combinazione risulta piuttosto elevato per cui risulta chiaro che le risorse richieste dall'algoritmo IOA.BAS sono elevate e il suo uso e' giustificabile solo con una funzione obbiettivo al massimo bidimensionale e con curve di luce con un numero di osservazioni non troppo elevato. Quest'ultima limitazione puo' essere ignorata potendo disporre di computer con velocita' di calcolo sufficiente (...macchine parallele) oppure avendo la necessaria pazienza usando una macchina sequenziale....

Le caratteristiche messe in evidenza poc'anzi sono comuni a tutti gli algoritmi di Ottimizzazione Interattiva per cui la loro diffusione e' in genere limitata a casi particolari.

Va comunque notato che il programma IOA.BAS risulta molto utile in quei casi dove le normali tecniche di ottimizzazione lasciano grossi dubbi sulla correttezza dei risultati ottenuti con le tecniche tradizionali in quanto permette una diretta mappatura della funzione obbiettivo, sempre limitatamente a problemi di istanza limitata.

Va comunque ricordato che con l'uso dello IOA.BAS permette di giungere alla soluzione con un numero di iterazioni limitato, ma a causa del fatto che

ogni RUN richiede 400 valutazioni della funzione obiettivo si ha che il guadagno rispetto all'uso di algoritmi alternativi, se esiste, e' decisamente limitato.

5) Modello del sistema binario

Come visto nelle precedenti sezioni il parametri liberi ottimizzati sia con l' E.V.L.C.S. sia con IOA.BAS sono risultati coincidenti per cui i parametri orbitali listati nella tabella I permettono di costruire un modello sufficientemente preciso del sistema binario in esame. Ora pur non avendo nessuna indicazione del tipo spettrale delle due stelle componenti e' appare evidente che MS Cep e' un sistema binario di tipo Algol classico con la stella secondaria espansa, piu' fredda e probabilmente prossima a riempire (se gia' non lo fa) il suo lobo di roche. Cio' puo essere possibile in quanto dalla tabella I si nota un rapporto tra le luminosita' molto a favore della stella piu' piccola e lo stesso puo' essere affermato in termini di rapporto tra le temperature superficiali. L'eclisse e' risultata essere di tipo totale al minimo principale ed anulare al secondario. Va osservato che il modello prevede una profondita' del secondario leggermente maggiore di quanto mostrato dalle osservazioni e piu' precisamente di .12 magnitudini, ma la differenza non e' stata ritenuta significativa in quanto non porta ad alcun apprezzabile variazione del modello del sistema binario. Alla luce di tutti i dati disponibili non si puo' fare ovviamente alcuna ipotesi sullo stadio evolutivo di questo interessante sistema mancando qualsiasi informazione spettroscopica sulle due componenti.

6) Conclusione

Nel presente lavoro e' stata analizzata la curva di luce di MS Cep al fine di costruire il primo modello del sistema. Nel contempo e' stata sperimentata l'applicazione di un algoritmo di ottimizzazione di tipo Interattivo al fine di verificarne le prestazioni e la possibilita di uso nella soluzione del problema del calcolo degli elementi orbitali delle variabili ad eclisse. I risultati sono stati largamente positivi sia nel fatto che e' stato possibile ottenere un modello consistente per il sistema binario in esame sia dal punto di vista dell'applicazione della nuova tecnica di soluzione in quanto pur presentando dei problemi in termini di risorse di calcolo richieste essa ha correttamente individuato il vettore ottimale dei parametri liberi corrispondente alla soluzione ottimale della curva di luce. Test di altri algoritmi e la soluzione di curve di luce di altre variabili ad eclisse saranno l'argomento dei successivi lavori. Un interessante fatto e' emerso e che sarebbe interessante mettere a punto e sperimentare delle tecniche di soluzione implementabili su macchine parallele. Tali algoritmi permetterebbero probabilmente di ottenere ancora maggiori informazioni sui sistemi binari analizzati minimizzando il tempo di esecuzione di algoritmi che possono essere costruiti in maniera piu' perfezionata e completa senza quelle inevitabili approssimazioni necessarie quando i computers a disposizione possiedono limitate velocita' di calcolo.

A. Gaspani

7) Bibliografia

Aho et AL.: "The design and the Analysis of Computer Algorithms", Ed. Addison Wesley, Reading, (Mass.), (1974).
 Darlington J. et al.: "Functional Programming and its Applications", Cambridge Univ. Press., Cambridge (1982).
 Knuth D.: "The art of Computer Programming", Vol.2, Ed. Addison Wesley Reading (Mass.) (1981).
 Kronsjo L.: "Complessita' Computazionale degli Algoritmi Sequenziali e Paralleli", Ed. Tecniche Nuove (Milano) (1987).
 Miller W.J. : Ric. Astr. vol.8,18 (1973).
 Nemirovsky A. et Al.: "Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization" Ed. J. Wiley (New York).
 Tibaldi M. : "Tecniche di Programmazione Non Lineare", Ed. Pitagora (Bologna).

=====
 Tab.1: Elementi Orbitali Ottimali di MS Cep (E.V.L.C.S. level #22)
 =====

PARAMETRO	VALORE	ERRORE
Min.1:	Occultazione	
r1=	.230	.005
r2=	.277	.006
i =	89.2	4.0
L1=	.85	.02
L2=	.15	.02
u1=	.45	(assunto)
u2=	.60	(assunto)
J21=	.12	.01
I21=	.1278	.0004
T21=	.60	.01
e=	.00	(assunto)
w=	.00	(assunto)
lo(occ)=	.149	.017
lo(tr)=	.896	.012
Dfo=	.0000	(assunto)
mo=	14.66	.02
L3=	.0000	(assunto)

=====
 Tab:II Summary dei RUNs eseguiti con il programma IOA.BAS
 =====

RUN No.	intervallo G1	intervallo k	ko	Glo	S(k,G1)
1	0. -> 1.0	0. -> 1.0	.526 ±.053	.105 ±.053	.02845
2	0. -> .1	0. -> 1.0	.842 ±.053	.0736 ±.0053	.02301816
3	.038 -> .1	.3 -> 1.0	.963 ±.037	.0641 ±.0033	.02301017
4	.070 -> .080	.80 -> .90	.826 ±.005	.0742 ±.0005	.02294675
5	.074 -> .075	.82 -> .85	.824 ±.002	.07437 ±.00005	.02294653
6	.0741 -> .0745	.824 -> .826	.8242 ±.0001	.07442 ±.00002	.02294653

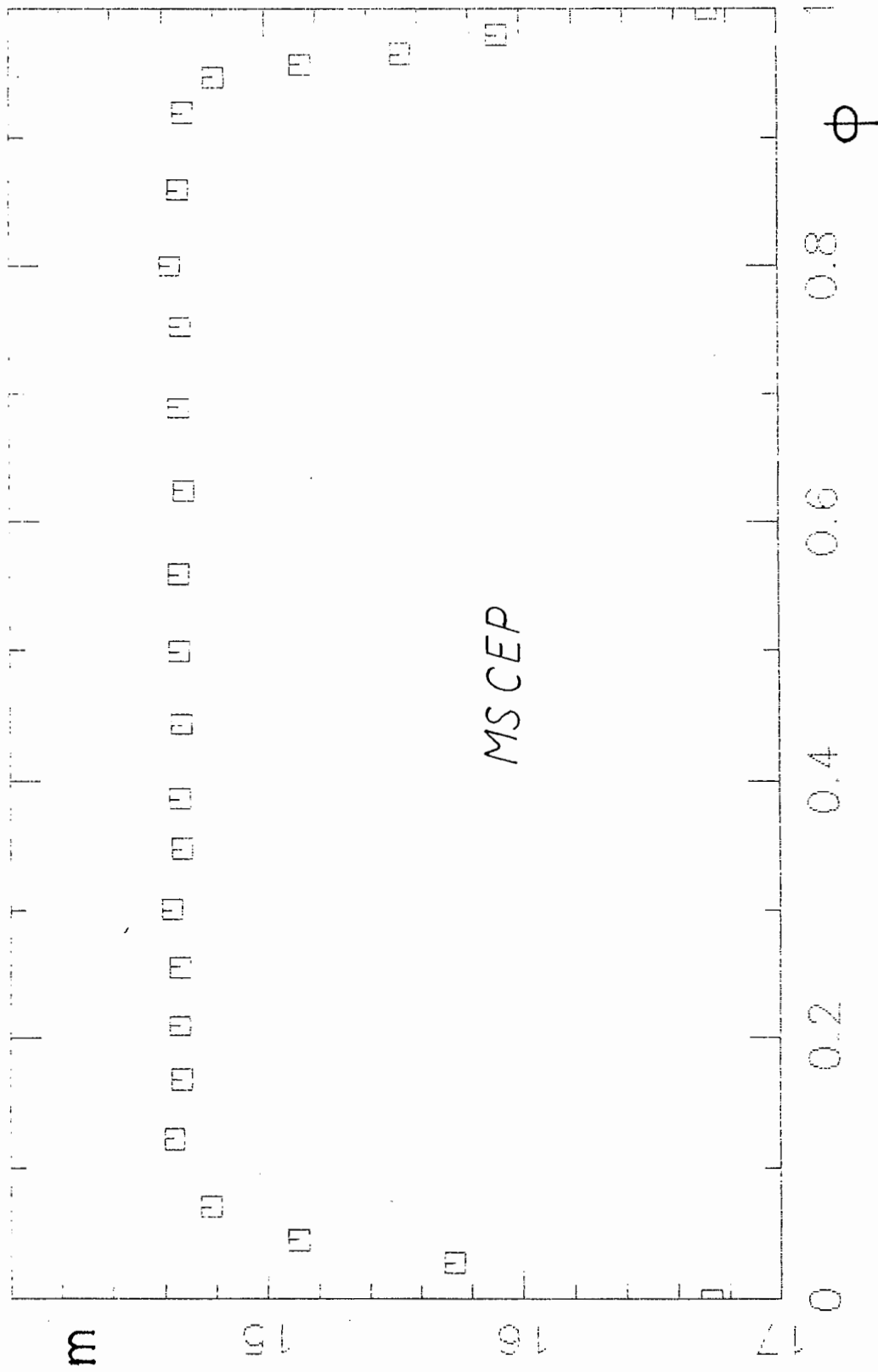
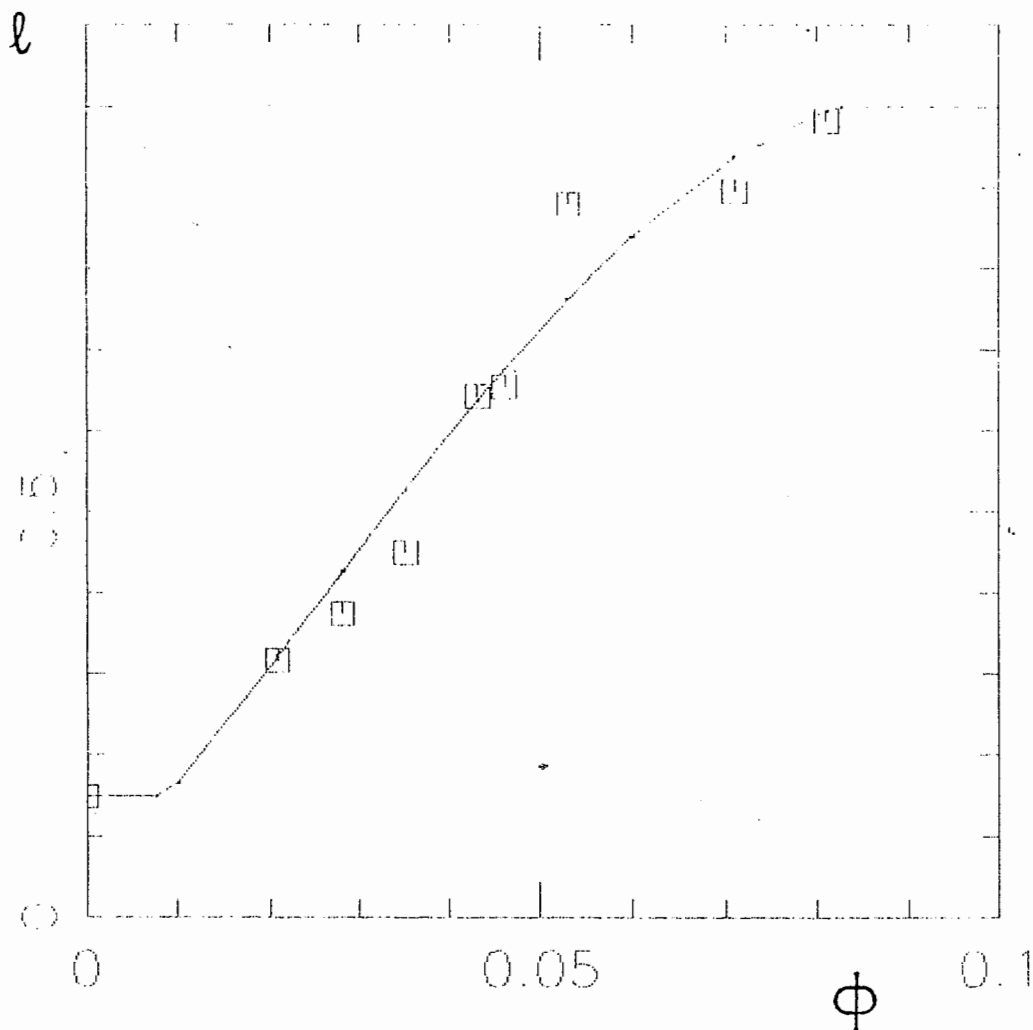


Fig.1: Curva di luce (punti normali) osservata per MS Cep.



PHASE	OBS. LUM.	COMP. LUM.	L(0)-L(C)
.000	.1486	.1486	-4.470349E-08
.028	.3732	.4253178	-5.211777E-02
.046	.6546	.6759623	-2.136225E-02
.071	.8954	.9383711	-4.297108E-02
.919	.9817	.9948633	-1.316333E-02
.947	.879	.7620797	.1169203
.957	.6427	.6367542	5.945802E-03
.965	.4487	.5266663	-7.796628E-02
.979	.3162	.3216766	-5.476624E-03

Fig.2: Curva teorica plottata tra i punti normali del minimo I e tabellina dei residui.

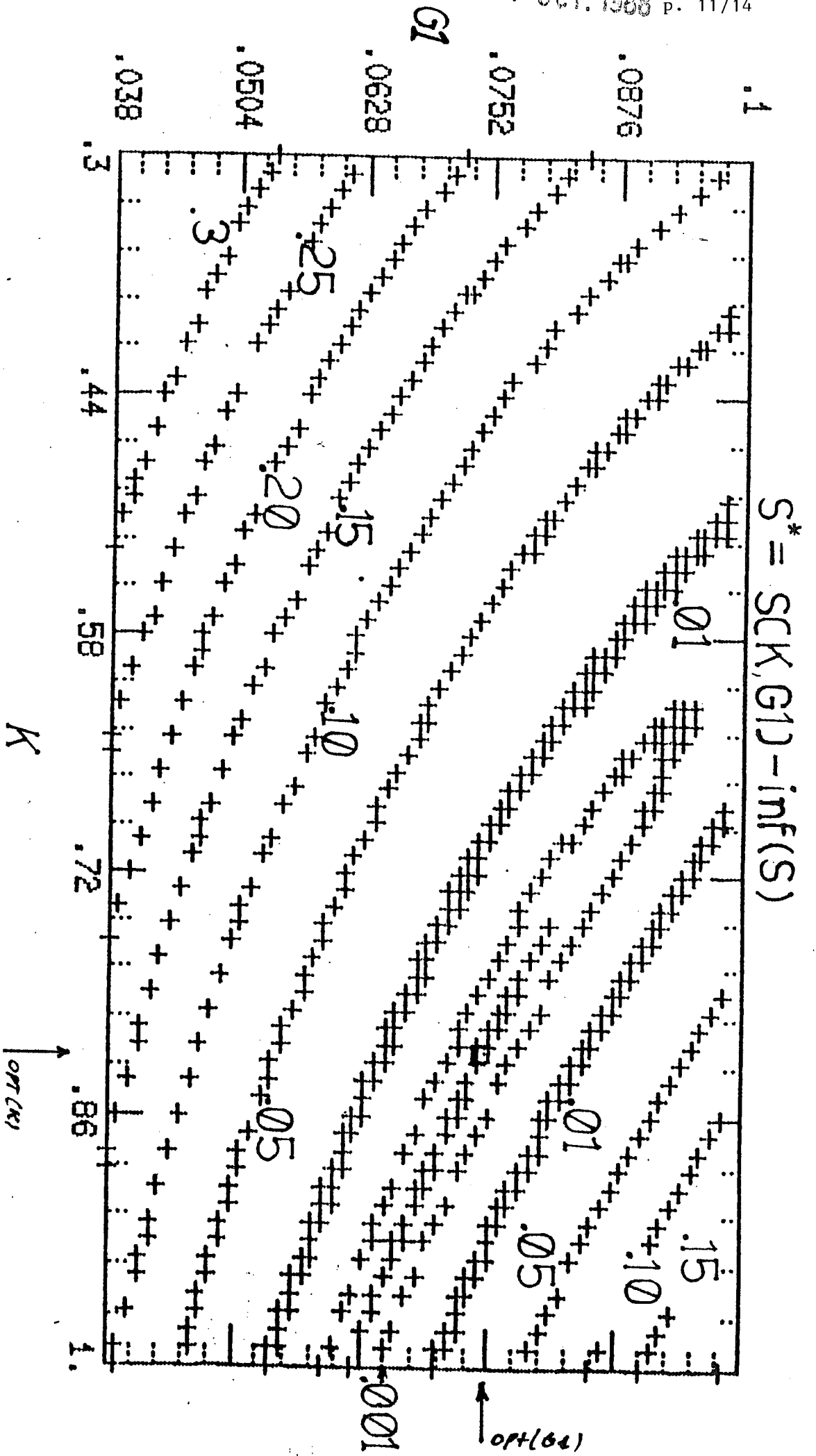


Fig.3: Diagramma 2D della funzione obiettivo $S^*(K, G1)$.

```

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * 0.00000 Level = F(x,y)
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * 5.263158E-02 0= .028485
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .1052632 1= 18.8696
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .1578947 2= 37.71072
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 * .2105263 3= 56.55183
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 * .2631579 4= 75.39295
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 * .3157895 5= 94.23407
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .3684211 6= 113.0752
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .4210527 7= 131.9163
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 * .4736842 8= 150.7574
1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 * .5263158 9= 169.5985
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 * .5789474
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 * .6315790 Minimum:
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 4 * .6842106 S(*)= .028485
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 4 5 * .7368421 Xopt= .1052632
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 4 5 5 * .7894737 Yopt= .5263158
1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 4 5 6 6 * .8421052
1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 4 4 5 5 6 7 * .8947368 e(Xo)= 5.263158E-02
1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 4 4 5 5 6 7 8 * .9473684 e(Yo)= 5.263158E-02
1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 4 4 5 5 6 7 8 9 * 1.000000
v=====v=\F(x,y) ** MS CEP **
0 <--x(min) **IOA.BAS** x(max)--> 1

```

RUN:1

```

9 8 8 8 7 7 7 6 6 6 6 6 5 5 5 5 5 5 5 5 * 0.00000 Level = F(x,y)
9 8 8 7 7 7 6 6 6 6 5 5 5 5 5 4 4 4 4 4 * 5.263158E-02 0= 2.301816E-02
9 8 8 7 7 7 6 6 6 5 5 5 5 4 4 4 4 4 3 3 * .1052632 1= .1050842
9 8 8 7 7 6 6 6 5 5 5 4 4 4 4 4 3 3 3 3 * .1578947 2= .1871503
9 8 8 7 7 6 6 5 5 5 4 4 4 4 3 3 3 3 2 2 * .2105263 3= .2692163
9 8 7 7 6 6 6 5 5 4 4 4 3 3 3 3 2 2 2 * .2631579 4= .3512824
9 8 7 7 6 6 5 5 4 4 4 3 3 3 3 2 2 2 1 * .3157895 5= .4333484
9 8 7 7 6 6 5 5 4 4 3 3 3 2 2 2 2 1 1 1 * .3684211 6= .5154145
9 8 7 7 6 5 5 4 4 4 3 3 2 2 2 2 1 1 1 1 * .4210527 7= .5974806
9 8 7 6 6 5 5 4 4 3 3 2 2 2 2 1 1 1 1 1 * .4736842 8= .6795466
9 8 7 6 6 5 4 4 3 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 * .5263158 9= .7616126
9 8 7 6 5 5 4 4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 * .5789474
9 8 7 6 5 5 4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 * .6315790 Minimum:
9 8 7 6 5 4 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .6842106 S(*)= 2.301816E-02
9 8 7 6 5 4 4 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .7368421 Xopt= 7.368421E-02
9 7 6 6 5 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .7894737 Yopt= .8421052
9 7 6 5 5 4 3 2 2 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 2 * .8421052
9 7 6 5 4 4 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .8947368 e(Xo)= 5.263158E-03
9 7 6 5 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 * .9473684 e(Yo)= 5.263158E-02
9 7 6 5 4 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 4 * 1.000000
v=====v=\F(x,y)
0 <--x(min) **IOA.BAS** x(max)--> .1 ** MS CEP **

```

RUN:2

Fig.4 ----> 6: Mapped in output dal programma IOA.BAS.

```

9 8 8 7 7 6 6 6 5 5 5 4 4 4 4 3 3 3 3 2 * .300000
8 8 7 7 6 6 6 5 5 4 4 4 4 3 3 3 3 2 2 2 * .3368421
8 7 7 6 6 6 5 5 4 4 4 3 3 3 3 2 2 2 2 2 2 * .3736842
8 7 7 6 6 5 5 4 4 4 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 * .4105263
7 7 6 6 5 5 4 4 4 3 3 3 2 2 2 2 1 1 1 1 1 * .4473685
7 6 6 5 5 4 4 4 3 3 3 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 * .4842106
7 6 5 5 4 4 4 3 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 * .5210526
6 6 5 5 4 4 3 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .5578948
6 5 5 4 4 3 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .5947368
6 5 4 4 3 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .6315790
5 5 4 4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .6684210
5 4 4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .7052631
5 4 3 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .7421053
4 4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 * .7789474
4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .8157895
4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 * .8526316
3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 3 * .8894737
3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 3 4 * .9263158
3 2 2 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 2 2 3 3 4 5 * .9631579
3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 4 4 5 6 * 1.000000

```

```

Level = F(x,y)
0= 2.301017E-02
1= .068381
2= .1137518
3= .1591227
4= .2044935
5= .2498644
6= .2952352
7= .340606
8= .3859769
9= .4313477

```

```

Minimum:
S(*)= 2.301017E-02
Xopt= 6.410526E-02
Yopt= .9631579

```

```

e(Xo)= 3.263158E-03
e(Yo)= 3.684211E-02

```

```

v=====v=F(x,y)
.038 <--x(min) **IOA.BAS** x(max)--> .1

```

** MS CEP **

RUN:3

```

3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8000000
2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8052632
2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 * .8105263
2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 * .8157895
2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .8210526
1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .8263158
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 * .8315790
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 * .8368421
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 * .8421052
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 4 * .8473684
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 * .8526316
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 * .8578947
1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 5 * .8631579
1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 5 5 * .8684210
1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 4 4 5 5 6 * .8736842
1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 * .8789474
1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 5 6 6 7 * .8842105
1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 5 5 6 7 7 * .8894737
1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 5 5 6 7 7 8 * .8947368
1 1 1 2 2 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 7 8 9 * .9000000

```

```

Level = F(x,y)
0= 2.294675E-02
1= 2.521641E-02
2= 2.748606E-02
3= 2.975572E-02
4= 3.202538E-02
5= 3.429504E-02
6= 3.656469E-02
7= 3.883435E-02
8= 4.110401E-02
9= 4.337367E-02

```

```

Minimum:
S(*)= 2.294675E-02
Xopt= 7.421053E-02
Yopt= .8263158

```

```

e(Xo)= 5.263157E-04
e(Yo)= 5.263156E-03

```

```

v=====v=F(x,y)
.07 <--x(min) **IOA.BAS** x(max)--> .08

```

** MS CEP **

RUN:4

```

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8200000
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8215790
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8231580
1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8247368
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8263158
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8278948
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .8294737
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 * .8310527
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 * .8326316
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 * .8342105
1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 * .8357895
1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 * .8373685
1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 * .8389474
1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 5 * .8405263
2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 * .8421052
2 2 2 2 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 * .8436842
2 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 * .8452632
3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7 * .8468421
3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 7 8 * .8484211
4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 * .8500000
v=====v=\F(x,y)
.074 <--x(min) **IOA.BAS** x(max)-->.075

```

```

Level = F(x,y)
0= 2.294653E-02
1= 2.305649E-02
2= 2.316645E-02
3= 2.327642E-02
4= 2.338638E-02
5= 2.349635E-02
6= 2.360631E-02
7= 2.371627E-02
8= 2.382624E-02
9= .0239362

```

```

Minimum:
S(*)= 2.294653E-02
Xopt= 7.436843E-02
Yopt= .8247368

```

```

e(Xo)= 5.263169E-05
e(Yo)= 1.578949E-03

```

** MS CEP **

RUN:5

```

9 8 7 6 5 4 4 3 2 2 2 1 1 1 1 1 0 1 1 1 * .8240000
8 7 6 5 5 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8241053
8 7 6 5 4 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 * .8242105
7 6 6 5 4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8243158
7 6 5 5 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8244211
7 6 5 4 4 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8245263
6 5 5 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 * .8246316
6 5 4 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 * .8247368
6 5 4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 * .8248421
5 5 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .8249474
5 4 4 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .8250526
5 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 * .8251579
4 4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 * .8252631
4 3 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 * .8253684
4 3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 * .8254737
4 3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 3 * .8255790
3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 3 * .8256842
3 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 3 4 * .8257895
3 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 3 3 4 * .8258947
3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 3 4 4 * .8260000
v=====v=\F(x,y)
.0741 <--x(min) **IOA.BAS** x(max)-->.0745

```

```

Level = F(x,y)
0= 2.294652E-02
1= 2.294818E-02
2= 2.294984E-02
3= 2.295151E-02
4= 2.295317E-02
5= 2.295483E-02
6= .0229565
7= 2.295816E-02
8= 2.295983E-02
9= 2.296149E-02

```

```

Minimum:
S(*)= 2.294652E-02
Xopt= 7.441579E-02
Yopt= .8242105

```

```

e(Xo)= 2.10526E-05
e(Yo)= 1.052618E-04

```

** MS CEP **

RUN:6