



Lo sfasamento negli (O-C) del minimo primario che ne deriva sarà quindi:

$$d(O-C) = z/c. \quad (2)$$

ove:  $z$  = distanza del baricentro del sistema stretto dal piano passante per il centro di massa del sistema triplo (nella direzione dello osservatore).

$c$  = velocità della luce.

La distanza  $z$  è legata ai parametri orbitali dell'orbita relativa intorno al centro di massa del sistema triplo:

$$z \equiv z(A12*\sin(i'), e', w', Mo', P1, Do) \quad (3)$$

ove:  $A12*\sin(i')$  = semiasse maggiore dell'orbita relativa del sistema stretto (a meno della inclinazione orbitale) intorno al baricentro del sistema triplo.

- $e'$  = eccentricità dell'orbita
- $w'$  = longitudine del periastro dal nodo ascendente
- $Mo'$  = anomalia media al minimo principale
- $P1$  = periodo orbitale del terzo corpo
- $Do$  = correzione sulla base dell'effemeride.

Nota una scelta di parametri orbitali è possibile generare una curva di (O-C) sintetica di conseguenza è possibile costruire un processo di ottimizzazione dei 6 parametri al fine di ottenere la miglior scelta di essi relativamente ai dati osservativi in input.

> Algoritmi di ottimizzazione

---

Osservando la (3) appare evidente che la soluzione del problema richiede l'ottimizzazione di 6 parametri. Tra questi  $P1$  richiede di essere ottimizzato separatamente rispetto agli altri 5 in quanto altrimenti esso influisce pesantemente sulla efficienza del metodo di ricerca.

> ottimizzazione di  $P1$

L'estensione temporale dei dati osservativi consente inizialmente di stimare per  $P1$  un valore tale che sia compreso tra 800 e 1000 cicli del sistema stretto (approssimativamente). L'ottimizzazione di questo importante parametro richiede una opportuna definizione della funzione obiettivo  $R(P1)$  da minimizzare. Nel presente caso è stata definita:

$$R(P1) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \left( [y(j)-y(j+1)]^2 + [E(j)-E(j+1)]^2 * P1^{-2} \right)^{1/2}} \quad (4)$$

13 ENE. 1988

dove:  $y(j) = (O-C)_j$  e  $E(j) =$  cicli del sistema stretto.

Appare chiaro che la (4) esprime in definitiva una misura legata alla dispersione degli  $(O-C)$  dopo che e' stata eseguita una fase con un certo periodo  $P_1$ .

La (4) e' stata minimizzata mediante un algoritmo di Ricerca Fattoriale Non Sequenziale (NFS) ad una dimensione ottenendo il valore ottimale di:

$$P_1(*) = (971.020 \pm 0.003) * P_0$$

dove  $P_0$  e il periodo orbitale del sistema stretto indicato dalla effemeride (1). Il valore ottimizzato corrisponde a  $3627.857 \pm 0.009$  giorni cioe' a 9.93 anni. Va notato che le barre d'errore su questi valori risultano piuttosto ottimistiche per cui e' lecito ragionevolmente ritenere:

$$P_1(*) = 9.933 \pm 0.001 \text{ anni}$$

\*\*) ottimizzazione dei restanti parametri

Per ottimizzare i rimanenti parametri liberi e' stato deciso di definire convenientemente la funzione obiettivo nel modo seguente:

$$S(X) = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=n} [y(\text{obs}) - y(X)]^2} \quad (5)$$

dove:  $y(\text{obs})$  : valore osservato per l'  $(O-C)$   
 $y(X)$  : valore calcolato sinteticamente usando il vettore dei parametri liberi  $X$  sotto test.

La definizione degli elementi del vettore  $X$  deve essere eseguita adottando qualche accorgimento in quanto i vari elementi  $A_{12} * \sin(i')$ ,  $e'$ ,  $w'$ ,  $Mo'$ ,  $Do$  hanno fra loro differenti ordini di grandezza.

Tale fatto rende la loro ottimizzazione piu' difficoltosa in quanto le curve di livello della (5) divengono fortemente allungate.

A questo proposito e' stata adottata la seguente definizione per gli elementi del vettore  $X$ :

$$\begin{aligned} x(1) &= Do & | \\ x(2) &= K * \sin(Mo' + w') & | \\ x(3) &= (e'/2) * K * \sin(2 * Mo' + w') & | > (6) \\ x(4) &= K * \cos(Mo' + w') & | \\ x(5) &= (e'/2) * K * \cos(2 * Mo' + w') & | \end{aligned}$$

con:  $K = (1/c) * A_{12} * \sin(i')$   
 $Mo' = n * (t_0 - T)$

Dopo questa definizione degli elementi del vettore  $X$  le curve di livello della  $S(x)$  diventano iperellissoidi con gli assi allineati con le direzioni dei parametri liberi.

Sotto queste condizioni la ricerca del minimo della  $S(x)$  diventa molto piu' agevole.

L'algoritmo scelto per la minimizzazione e' stato uno di tipo PATTERN SEARCH messo a punto da Gaspani il quale permette sulla base di esplorazioni locali successive della funzione obbiettivo, di giungere alla identificazione dello ottimo cercato.

Tale algoritmo e' stato codificato nel programma PATSER il quale e' disponibile per gli interessati sia in FORTRAN (DEC Vax) sia in BASIC (C128).

### \*\*\*) il programma PATSER

Il programma PATSER esegue la minimizzazione di una funzione obbiettivo a  $N$  variabili, definita dall'utente, (con  $N$  limitato solamente dalla macchina a disposizione e/o dal CPU\_TIME disponibile) costruendo ad ogni iterazione un running pattern di  $2*(N+1)$  valori della funzione obbiettivo corrispondenti a  $2*(N+1)$  vettori di test.

Un nuovo pattern viene poi costruito sul punto definito dal vettore del pattern precedente dotato di  $S(x)$  piu' bassa, le sue dimensioni vengono aggiornate (ridotte) di un fattore specificato in input all'inizio del RUN e il ciclo viene ripetuto finche' un certo criterio di convergenza non sia rispettato. Se l'esplorazione locale non porta ad un miglioramento allora il pattern viene distrutto e ne viene generato uno nuovo le cui dimensioni lineari in ogni direzione sono ridotte a meta'.

Il processo viene iterato fino a che non viene soddisfatto il criterio di stop che nel presente caso e' definito da:

$$CF(S) < \epsilon \quad (7)$$

con  $\epsilon$  fissato in input.

Il significato della Funzione di Convergenza  $CF(S)$  e' quello di una norma del subgradiente pesato della  $S(x)$  cioe:

$$CF(S) = m(k) * |grad(S)| \quad (7a)$$

con:  $m(k)$  : fattore di riduzione del pattern all'iterazione  $k$ .

Tale definizione permette di ridurre al minimo i problemi di oscillazione del valore di  $|grad(S)|$  dovuti a fenomeni di instabilita' numerica generati dalla lunghezza finita della word del computer usato, quando il processo si trova molto vicino al punto di ottimo.

Infatti e' stato notato che l'errore relativo  $|e|$  sul valore di ciascuna derivata parziale numerica, dovuto alla lunghezza finita della word del computer, e' data da:

$$|e| \sim |2.0^{*(1-t)} / (dS*dx)|$$

dove  $t$  e' la lunghezza della mantissa nella word della macchina usata e  $dS$ ,  $dx$  sono gli incrementi finiti usati per il calcolo numerico delle derivate parziali.

Tale errore aumenta fortemente quando le derivate sono calcolate su intervalli piccoli e su tratti di funzione obbiettivo quasi piani come capita in genere in vicinanza dell'ottimo.

L'introduzione del parametro di controllo  $m(k)$  permette di tenere a valori ridotti  $|e|$  fino a raggiungere valori prossimi a ulp (unity of the last place) del computer usato, che vale:

$$ulp \sim b^{*(-t)}$$

13 DEC. 1988

dove  $b$  e' la base numerica dell'aritmetica della macchina. Durante lo stadio iniziale del processo di ricerca il valore di  $m(k)$  e molto prossimo a 1 per cui risulta determinante il valore di  $|\text{grad}(S)|$  ai fini della convergenza, mentre durante lo stadio finale della ricerca, dove  $|\text{grad}(S)|$  assume valori molto ridotti ed e' molto sensibile alle instabilita' numeriche il processo di ottimizzazione e' guidato da  $m(k)$  il quale per il modo in cui viene gestito non risente apprezzabilmente di esse.

Da notare che il Pattern Search e' un algoritmo costruito per trattare funzioni di cui non sia analiticamente nota alcuna derivata per cui nella (7a) e' stata adottata la seguente approssimazione numerica:

$$|\text{grad}(S)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{NF} \left| \frac{\partial S}{\partial X_j} \right|^2} \quad (8)$$

dove le derivate sono calcolate numericamente mediante rapporti incrementali. Appare chiaro che in realta'  $\text{grad}(S)$  e' il subgradiente della funzione obbiettivo (pendenza dell'iperpiano di supporto alla  $S(*)$  all'interno del pattern considerato).

Per quanto concerne il valore di  $\text{eps}$  da assumere in input si verifica che esso deve essere molto piccolo (ad esempio:  $\text{eps} \sim 1E-07$ ) in ogni caso va tenuto presente che dovra' essere:

$$\text{eps} \sim 2^{-t} \quad (9)$$

dove  $t$  e' il numero di bits che compongono la mantissa nella word, nella rappresentazione interna in floating point, del computer utilizzato. Nel presente caso essendo stato utilizzato un DEC VAX 11/750 si ha una word di 4 bytes da 8 bits in singola precisione indi si hanno 23 bits di mantissa nella word per cui:

$$\text{eps} \sim 2^{-23} \sim 1E-07$$

mentre lavorando in doppia precisione (word da 8 bytes da 8 bits) e' necessario porre:

$$\text{eps} \sim 2^{-55} \sim 3E-17$$

per sfruttare appieno le performances dell'algoritmo. In tutta l'analisi descritta nel presente lavoro e' sempre stato usato

$$1E-07 < \text{eps} < 1E-09$$

valori che rappresentano a questo stadio il miglior compromesso lavorando in singola precisione.

#### 4) Elaborazione dati

Il set di dati a disposizione era, come gia' detto, di 15 valori di (O-C) di cui e' stata ottenuta una periodicita' di 971.02 giorni. Dalla curva degli (O-C) e' stimabile una ampiezza di circa 0.03 giorni e questo e' l'unico valore preliminare che e' possibile assumere per il

parametro libero x(4).

Per amore di generalita' sono stati eseguiti alcuni RUNs partendo da valori del tutto arbitrari dei parametri liberi e da differenti posizioni nello iperspazio dei parametri al fine di avere delle garanzie sulla globalita' dell'ottimo identificato dall'algoritmo.

La tabella I mostra i vari starting vectors e i vettori ottimali risultanti.

TAB. I : Summary dei RUNs eseguiti

	RUN 1	RUN 2	RUN 3	RUN 4	
x(1)	.000	.000	1.000	-.002	giorni
x(2)	.000	.000	1.000	-.002	"
x(3)	.000	.000	1.000	.001	"
x(4)	.000	.000	1.000	.030	"
x(5)	.000	.000	1.000	.005	"
eps	1E-07	1E-10	1E-07	1E-07	
X(1)	-.00177	-.00177	-.00176	-.00177	giorni
X(2)	-.00160	-.00160	-.00160	-.00160	"
X(3)	.00080	.00080	.00081	.00080	"
X(4)	.02810	.02809	.02808	.02809	"
X(5)	.00400	.00400	.00400	.00401	"
S(*)	1.2420E-03	1.2415E-03	1.2416E-03	1.2416E-03	Target
CF(S)	3.2250E-08	0.0000E+00	3.7040E-08	8.2520E-08	
NITER	32	605	37	332	Iterazioni
NVALS	397	7273	457	3997	Valut. S(*)
RIDFACT	.999	.999	.999	.999	
A12sin(i)	738.26E+06	738.02E+06	737.84E+06	738.02E+06	Km
e'	.146	.146	.146	.146	
w'	342.27	342.30	342.25	342.30	gradi
Mo'	14.55	14.52	14.59	14.53	gradi
P1	9.933	9.933	9.933	9.933	anni
f(m3)	1.222	1.222	1.221	1.222	M0
Do	-.00177	-.00177	-.00176	-.00177	giorni

nota: x(J) = parametri liberi iniziali , X(J) = valori ottimizzati  
 NITER = numero iterazioni eseguite  
 NVALS = numero valutazioni della funzione obiettivo eseguite  
 RIDFACT = parametro che gestisce l'evoluzione del pattern

Il RUN 1 parte con valori tutti nulli per i parametri liberi e con eps =1.0E-07, la convergenza viene raggiunta dopo 32 iterazioni.  
 Il RUN 2 parte dallo stesso punto del precedente RUN, ma con un criterio di convergenza piu' stretto e qui si nota che dopo una trentina di iterazioni i valori ottenuti per i parametri liberi sono gia' ben assestati sui valori

13 ENE. 1988

ottimali ( $CF(S) \sim 1.0E-07$ ) il processo pero' prosegue e termina dopo aver eseguito 605 iterazioni, oltre 500 delle quali spese in piccole oscillazioni intorno all'ottimo globale, con la  $CF(S)$  che passa da  $1.0E-07$  a circa 0.000 trovando gli stessi valori del RUN 1 per i parametri liberi ottimizzati.

Il RUN 3 possiede le stesse caratteristiche del RUN 1, ma parte con :  
 $X = \{1, 1, 1, 1, 1\}$ .

La convergenza e' ottima giungendo dopo 37 iterazioni a  $CF(S) \sim 3.2E-08$  e prova che la  $S(*)$  e' quasi strettamente unimodale e che l'ottimo identificato e' quello globale.

Il RUN 4 invece parte da un set dei valori iniziali dei parametri liberi abbastanza vicino a quello ottimale (set desunto dai precedenti 3 RUNs) e converge, sorprendentemente, dopo ben 332 iterazioni nonostante il punto di partenza molto favorevole e il valore di eps pari a  $1.0E-07$ .

Tale fenomeno rimane a tutt'ora privo di spiegazione e forse e' legato a qualche caratteristica numerica dell'algoritmo durante la ricerca su una funzione localmente quasi piana.

La definizione (5) della funzione obbiettivo ci permette di mettere in relazione il suo valore minimo con l'errore standard sui valori ottimali dei parametri liberi identificati dall'algoritmo

La tabella II mostra i valori finali adottati per gli  $x(j)$  e le loro barre d'errore mentre la tabella III riporta i valori finali degli elementi orbitali dell'orbita del terzo corpo.

=====  
 Tab. II: Valori finali dei parametri liberi e loro errori  
 =====

$X(1) = -.002 \pm .002$   
 $X(2) = -.0016 \pm .0009$   
 $X(3) = .0008 \pm .0009$   
 $X(4) = .0281 \pm .0009$   
 $X(5) = .0040 \pm .0009$   
 =====

=====  
 Tab. III: Parametri orbitali del terzo corpo  
 =====

$A_{12} \sin(i') = 738E+06 \pm 13E+06$  Km  
 $e' = .14 \pm .03$   
 $w' = 342 \pm 17$  gradi  
 $Mo' = 14.6 \pm 14.7$  gradi  
 $P_1 = 9.933 \pm .001$  anni  
 =====

Tali valori permettono di stimare una funzione di massa  $f(m_3)$  pari a:

$$f(m_3) = 1.22 M_{\odot}$$

La tabella annessa alla fig.2 riporta i valori teorici degli (O-C) e i residui sui valori osservati.

## 5) Discussione

I risultati ottenuti mostrano che l'andamento degli (O-C) registrato per VB10 Cyg puo' suggerire la presenza di un terzo corpo perturbante il moto del sistema binario ad eclisse.

Il fatto che l'analisi della curva di luce suggerisca la presenza di una terza luce rende ancor piu' plausibile tale spiegazione.

In ogni caso il tutto rimane per ora solo allo stadio di ipotesi possibile in quanto tutto il materiale osservativo impiegato nel caso del presente lavoro e' di tipo fotografico.

Per quanto riguarda le tecniche di analisi dei dati impiegate nel corso del presente lavoro va notato che l'applicazione delle procedure di ottimizzazione utilizzate con successo in altri campi di ricerca puo' portare a vie alternative e talvolta piu' efficienti di analisi dei dati sperimentali di pertinenza puramente astronomica.

In alcuni casi e' stato possibile notare che l'uso di tali tecniche permette una piu' estesa automazione della elaborazione dei dati a tutto vantaggio anche delle possibilita' osservative.

Per quanto riguarda riguarda la stella in esame sarebbe di estremo interesse poter raccogliere dei dati osservativi piu' aggiornati al fine di verificare l'andamento dei residui osservato negli ultimi anni scorsi

## 6) Conclusione

Nel presente lavoro e' stato analizzato il diagramma degli (O-C) della variabile ad eclisse VB10 Cyg al fine di spiegarne l'andamento suggerendo la presenza di una terza stella intorno a cui il sistema stretto rivoluisce. L'analisi della curva di luce di questa stella verra' dettagliatamente descritta in un lavoro successivo.

A. Gaspani

## 7) Bibliografia

- James F. : "Function Minimization", Proc. CERN Comp. Data Proc. Sc. 1972.  
Miller W.J. : 1959, Ric. Astr. Vol. 6, 1  
Minoux M. : "Mathematical Programming", Ed. J. Wiley (New York).  
Pierre D. : "Optimization Theory and Applications", Ed. Dover (New York).  
Pike R. : "Optimization For the Engineering Systems", Ed. Van Nostrand. R.  
Rice J. : "Numerical Methods, Software and Analysis", Ed. Mc Graw Hill.  
Tibaldi M. : "Tecniche di Programmazione Non Lineare", Ed. Pitagora, (Bologna).



13 ENE. 1988

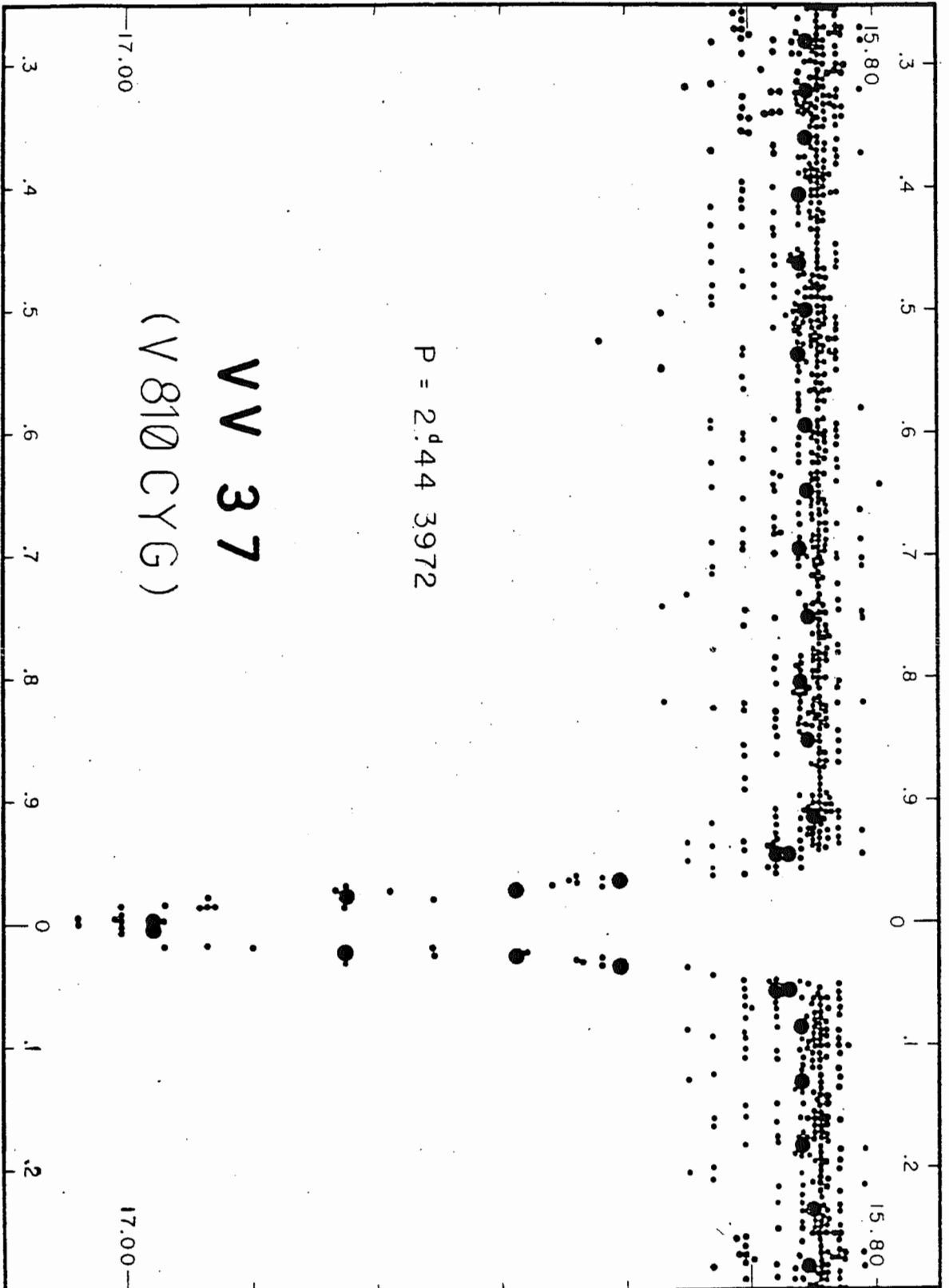


Fig. 1 : Curva di luce di VB10 Cyg.

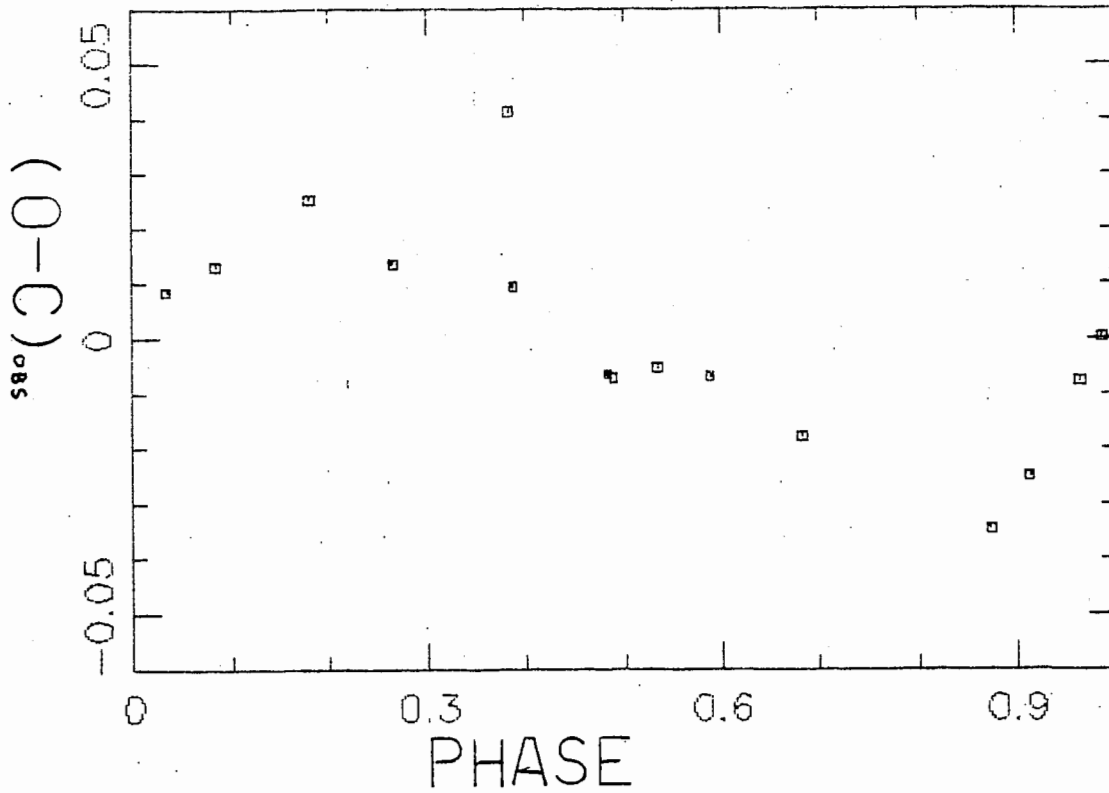


Fig. 2 : Curva degli (O-C) di VB10 Cyg.

POINT	PHASE	(O-C)obs	(O-C)calc	RESIDUALS
1	0.3820834	4.1299999E-02	1.4451401E-02	2.6848597E-02
2	0.4881667	-7.1000000E-03	2.1148159E-03	-9.2148157E-03
3	0.5880556	-6.8000001E-03	-1.1223882E-02	4.4238823E-03
4	0.6828055	-1.7800000E-02	-2.4273150E-02	6.4731501E-03
5	0.8733333	-3.4499999E-02	-2.6985053E-02	-7.5149462E-03
6	0.9135000	-2.5100000E-02	-2.0843569E-02	-4.2564310E-03
7	0.9639444	-7.7999998E-03	-1.0675786E-02	2.8757863E-03
8	0.9855833	3.0000001E-04	-5.8420086E-03	6.1420086E-03
9	3.3972222E-02	8.3999997E-03	5.0015440E-03	3.3984557E-03
10	8.4444441E-02	1.3100000E-02	1.4949479E-02	-1.8494790E-03
11	0.1812500	2.5200000E-02	2.5593283E-02	-3.9328262E-04
12	0.2646667	1.3600000E-02	2.4824196E-02	-1.1224196E-02
13	0.3861944	9.3000000E-03	1.4002214E-02	-4.7022142E-03
14	0.4819722	-6.5000001E-03	2.8793300E-03	-9.3793301E-03
15	0.5334722	-5.2999998E-03	-3.6977318E-03	-1.6022681E-03